Finał Ligi matematycznej - marzec 2022

Zadanie 1

Udowodnij, że jeżeli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$.

Zadanie 2

Wysokości trójkąta mają długości 12, 15, 20. Oblicz pole tego trójkąta

Zadanie 3

Wiadomo, że $abc = 1$ i $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Udowodnij, że wówczas co najmniej jedna z liczb a, b, c równa się 1.

Zadanie 4

W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego C poprowadzono wysokość CD i w każdy z trójkątów ABC, ACD, BCD wpisano okrąg. Wykaż, że suma promieni tych okręgów jest równa wysokości CD.

Zadanie 5

Udowodnij, że liczba $\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{41+24\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$ jest całkowita.